А.М. Инков

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ. ЛЕКЦИЯ № 15



Шымкент, 2011

Тема 11 Методы идентификации нелинейных динамических характеристик

Лекция 15 Методы идентификации нелинейных динамических характеристик

В лекции рассмотрены методы идентификация нелинейных динамических объектов включая вопросы: применение гармонической линеаризации при идентификации нелинейных объектов; использование метода статистической линеаризации для идентификации нелинейных объектов; идентификация нелинейных объектов с использованием функциональных степенных рядов

Существует несколько методов идентификации нелинейных систем, некоторые из них:

1. метод прямого поиска;
2. аппроксимация нелинейности;
3. модель Гаммерштейна;
4. метод Винера;
5. двухэтапная процедура; п
6. применение гармонической линеаризации при идентификации объектов;
7. использование метода статистической линеаризации для идентификации нелинейных объектов; и
8. идентификация нелинейных объектов с использованием функциональных степенных рядов
9. градиентные методы идентификации нелинейных систем и др.

Сущность метода прямого поиска:

- нелинейную функцию f(x) преобразуют в линейную функцию /л(х);
- далее применяют любой метод идентификации линейных систем.

Допустим, что нелинейная модель объекта имеет вид:

$$y = a_0 x_1^{в1} x_2^{в2},$$

где x_1, x_2 - входные параметры, у - выходной параметр, а0, в1, в2 - искомые параметры. Выполняем логарифмирование и получаем:

$$\ln y = \ln a_0 + в_1 \ln x_1 + в_2 \ln x_2;$$

$$Z = \ln y, \quad \varepsilon_1 = \ln x_1, \quad \varepsilon_2 = \ln x_2, \quad A = \ln a_0;$$

$$Z = A + в_1 \varepsilon_1 + в_2 \varepsilon_2$$

Рассматриваем только положительные значения у.

Аппроксимация нелинейности. Таблично заданная функция (явно нелинейная) аппроксимируется с помощью полинома произвольным методом. Полученный полином и есть модель нашего объекта. Ограничения: функция должна быть непрерывна. Существует теорема Вейерштрасса, которая доказывает, что все нелинейности можно описать полиномом:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + в_1 x_2 + в_2 x_2^2$$

а) Замена линейной переменной и сведение к регрессии;
б) Применение интегральных формул.

Модель Гаммерштейна

Входной сигнал u(t) известен.

Если известна функциональная зависимость f(u(t)) - вид нелинейности, то вводим Z=f(u(t)). Идентификация сводится к определению параметров линейной части:

$$y(t) = A \cdot Z(t).$$

Если функциональная зависимость f(u(t)) не известна, то строится таблица этой нелинейной зависимости. По этой таблице любой интерпретируемой формулой получаем аппроксимирующий полином нелинейности f*(u(t)). Зная параметры аппроксимирующего полинома, вводим Z(t) = f(u(t)) и, снимая соответствующие ему y(t), решаем задачу идентификации:

y(t)= A · Z (t).

xi — a0 ^+ ai xi, функция является нелинейной.

x2 = J (xi)

Пример: Система приводится к следующему виду (см. рисунок 15.1):

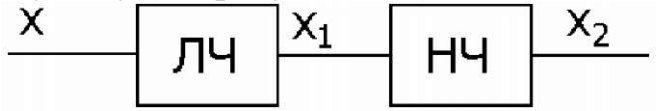


Рисунок 15.1 – Разбиение системы на линейную и нелинейную части

Схема нелинейной системы. Используя метод интерполяции, аппроксимируем полином

$$y = в_0 + в_1 x_1 + в_1 x_1^2 + \ldots + в_m x_1^m$$

Составляем обобщенный вектор:

$$V = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ 1 \\ x_1 \\ x_1^2 \\ \vdots \\ x_1^m \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow a_0 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ \vdots \\ v_{m+3} \end{matrix}$$

Тогда искомая матрица:

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & в_0 & в_1 & \ldots в_m \end{bmatrix}$$

может быть получена по выражению:

где

$$A = YV^T \left[VV^T \right]^{-1},$$

$$Y = \begin{bmatrix} x_2(1) & x_2(2) \ldots & x_2(k) \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} v_1(1) & \cdots & v_1(k) \\ v_2(1) & \cdots & v_2(k) \\ \vdots & & \vdots \\ v_{m+3}(1) & \cdots & v_{m+3}(k) \end{bmatrix}$$

В инженерной практике большое применение находят приближенные методы, основанные на замене действительных зависимости между входной и выходной переменными приближенными линейными. При этом линеаризацию необходимо производить так, чтобы учесть хотя бы приближенно нелинейные свойства звеньев, т.е. чтобы для линеаризованных элементов не выполняется принцип суперпозиции.

Линеаризация нелинейных характеристик путем разложения в ряд состоит в замене характеристики y = f(x) приближенной линейной зависимостью, определяемой двумя первыми членами разложения характеристики в ряд Тейлора . Пусть характеристика y = f(x) дифференцируема и входной сигнал x (f) мало отличается от некоторого среднего значения x0, тогда зависимость y = f(x) можно заменить приближенной:

y = f(x0) + f ' (x-0) (x - x0). (15.1)

Замена нелинейной зависимости y =f(x) линейной геометрически представляет собой замену кривой y= f(x), касательной к ней в точке x0.

Действующие внешние возмущения можно представить как стационарные случайные функции x (г) с математическим ожиданием тх и центрированной случайной составляющей л(г):

x(t)^mx + x(t). (15.2)

В этом случае практически линеаризацию нелинейной характеристики целесообразно производить относительно центрированного входного случайного сигнала x(t), т.е. за центр разложения .x0 в (15.1) взять математическое ожидание тх входного сигнала x(1). В результате получается:

y (г) *./>У + ./' (тх) x (г). (15.3)

Таким образом, приближенная зависимость (15.3) линейна только относительно случайной составляющей x(t) входного сигнала и нелинейно относительно математического ожидания тх, поэтому принцип суперпозиции здесь неприменим.

Гармоническая линеаризация. В целом ряде практических задач приходится рассматривать воздействие на линейное звено гармонических колебаний

X(t)= A sin ωt = A sin ψ, ψ=ωt. (15.4)

Выходной сигнал нелинейного звена также будем периодическим, но не гармоническим.

Идея гармонической линеаризации состоит в том, что выходные периодические колебания y(t) разлагают в ряд Фурье и для дальнейших исследований ограничиваются рассмотрением лишь первых гармоник этого ряда. В этом случае нелинейная зависимость

y= y(t)=f(Asinψ),

заменяется приближенной

Y(t)=a0+asin ωt+bcosωt=a0+ q1x+q2x/ω,

где

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(A\sin\phi)d\phi$$

$$q_1 = \frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi} f(A\sin\phi)\sin\phi d\phi$$

$$q_2 = \frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi} f(A\sin\phi)\cos\phi d\phi$$

Статистическая линеаризация. Метод приближенной замены нелинейной характеристики эквивалентными в вероятностном смысле линейными зависимостями называется методом статистической линеаризации. В результате такой линеаризации нелинейная зависимость y=f(t) заменяется приближенной:

y(t)=kamx + k,x0(t).

где mx = const — математическое ожидание стационарного случайного сигнала на входе нелинейного элемента; x0(t) — центрированная случайная составляющая входного сигнала x (t).

Предполагается, что выходной стационарный случайный сигнал может быть представлен в виде:

y(t) = ту. + y/(t)

где ту — математическое ожидание y(t); y/(t) -центрированная случайная составляющая y(t).

Коэффициент к0 = ту/тх называется статистическим коэффициентом усиления нелинейного звена по математическому ожиданию. Коэффициент k1=±σy/ σ x .

Идентификация нелинейных объектов с использованием функциональных степенных рядов Производная функции определяется разностным отношением:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Если существует предел и не зависит от того, как стремится к нулю, то функция является аналитической. Следовательно в окрестности некоторой точки а можно ее разложить в ряд Тейлора:

$$f(z) = f(a) + \frac{z-a}{1!} f'(a) + \ldots + \frac{z-a}{n!} f^n(a) + \ldots$$

Если а=0 , то получаем ряд Маклорена:

$$f(z) = f(0) + \frac{z}{1!} f'(0) + \ldots + \frac{z^n}{n!} f^n(0) + \ldots$$

Учитывая , что последующие слагаемые выше второго достаточно малые величины, можно заменить функцию линейной частью разложения

Градиентные методы идентификации нелинейных систем. Для общей задачи минимизации функционала:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^t [z(t) - y(t)]^2 dt \qquad \text{(15.5), (15.6)}$$

$$x(t_0) = x_0$$

при ограничениях: $\dot{x} = f[x(t), p(t), t]$, где f – нелинейная вектор – функция.

Случай p_i - const $\dot{p} = 0$ будем задаваться начальным значением p^i , i- номер итерации, и решив систему дифференциальных уравнений оценим величину функции штрафа J^i. Слегка изменяя p^i , для нового значения $p_j^i + h_j$ найдем штраф:

$J^i + \eta_j$, j = 1,n, n - число неизвестных коэффициентов

j-ю компоненту вектора-градиента функции штрафа можно приближенно оценить как

$$\frac{dJ}{dp_j^i} \approx \frac{(J^i + \eta_j) - J^i}{(p_j^i + h_j) - p_j^i} = \frac{\eta_j}{h_j} \qquad (15.7)$$

Повторяя эту процедуру для возмущений различных компонент вектора параметров, определим приближенное значение вектора-градиента dJ/dp^i Первое приращение вектора параметров в направлении наискорейшего спуска к минимуму функции штрафа составит

$$\Delta p^i = K^i \frac{dI}{dp^i}, \qquad (15.8)$$

и K^i – выбирается из условия

$$\min_{K^i} I(p^i - K^i \frac{dJ}{dp^i}) \qquad (15.9)$$

а новое приближение для вектора параметров определится как:

$p^{i+1} = pi + \Delta p^i$.

Простота приближенного метода позволила положить его в основу нескольких итерационных схем, однако трудно оценить ошибку, связанную с приближенным вычислением dJ/dp^i (процедура точного вычисления свелась бы к уже известным алгоритмам решения динамических задач). Приближенная процедура приводит к существенным ошибкам, особенно тогда, когда функция штрафа не очень чувствительна к изменению вектора параметров. Последнее, к сожалению, довольно часто имеет место, если измерения или наблюдения искажены помехой и имеются неизвестные входные сигналы.

Алгоритм вычислений следующий

1. Задаемся начальными значениями вектора параметров **p**.
2. Решаем дифференциальные уравнения (2)
3. Вычисляем значения функционала (1)
4. Вычисляем компоненты вектора-градиента функционала (1) по ф.(3).
5. Определяем новые значения p по ф.4 из условия (5)
6. Переходим к п.2 алгоритма, если компоненты вектора-градиента больше некоторой величины ε.

Если коэффициенты системы есть функции времени, т.е. p = p(t), то можно применить способы аппроксимации функции p(t).

1. Кусочно-постоянными функциями:

$$p^i = (p_i^1, p_i^2, ..., p_i^m)$$

2. Кусочно-линейными функциями вида, показанными на рисунке 15.2.

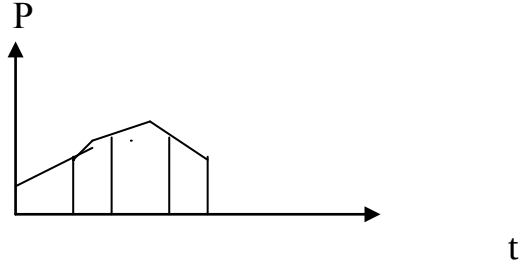


Рисунок 15.2 – Кусочно-линейная аппроксимация нелинейной функции

3. Полиномиальная гипроксимация.

$$p_i = \sum_{k=0}^{m_i} p_{i,k} t^k, \quad m_i = t_f / h_p,$$

4.Сплайн-аппроксимация (см. рисунок 15.3).

$$p_i = \sum_{k=0}^{m_i} p_{i,k} t^k, \quad m_i = t_f / h_{sp}, \text{ где } h_{2p} << h_p$$

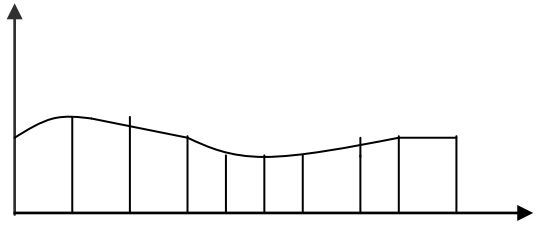


Рисунок 15.3 – Сплайн - аппроксимация нелинейной функции

Основная литература

1. Гроп Д. Методы идентификации систем. - М.: Мир, 1979
2. Иванов А. И. Быстрая идентификация нелинейных динамических объектов // CD-ROM “Бизнес-игры”. − М.: CD-ROM изд-во “Compact Book Publishing”, 1996. − 226 с.

Дополнительная литература

3. Бокс Дж, Дженкинс. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Выпуск 1. –М.: Мир, 1970, 406с
4. Бокс Дж, Дженкинс. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Выпуск 2. –М.: Мир, 1974, 193с